Lesoverzicht

- Differentiaalvergelijkingen van orde één
  - Definitie en voorbeelden
  - Soorten oplossingen: algemene, particuliere en singuliere oplossing
- Oplossingsmethoden volgens type
  - Scheiding van de variabelen
  - Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde één
  - Differentiaalvergelijking van Bernoulli

Wat is een differentiaalvergelijking?

- **Definitie**
  Een differentiaalvergelijking (DV) van de 1ste orde is een vergelijking waar de eerste afgeleide van een onbekende functie in voorkomt.
- **Voorbeelden**
  - $K' = (3q - 4)^2$
    met $K = K(q)$ de onbekende (kosten)functie
  - $y' = \sqrt{x}$
    van het type $y' = f(x)$
    en met $y = y(x)$ de onbekende functie
  - $y' = y^2 + 1$
    van het type $y' = f(y)$
    en met $y = y(x)$ de onbekende functie
  - $y' + y = x$
    van het type $y = f(x, y)$, met $f(x, y) = x - y$
    en met $y = y(x)$ de onbekende functie

Oplossingen van een differentiaalvergelijking

- Een oplossing van een DV is een afleidbare functie die door substitutie in de gegeven DV van deze vergelijking een identiteit maakt.
  Een DV heeft meestal oneindig veel oplossingen.
- De algemene oplossing van een DV van orde 1 is de familie oplossingen van deze DV die één arbitraire constante bevat.
- Een particuliere oplossing van een DV van orde 1 is één exemplaar uit de algemene oplossing, waarbij de voorkomende constante een particuliere waarde heeft aangenomen.
- Een singuliere oplossing van een DV is een oplossing van deze DV die niet voorkomt in de algemene oplossing ervan.

DV van het type $y' = f(x)$

- **Algemene oplossing**

  $$y = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

  waarbij $F(x)$ een primitieve functie van is van $f(x)$.
- **Voorbeeld**

  $$y' = \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}$$

  heeft als algemene oplossing

  $$y = \mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

DV van het type $y' = f(y)$

Methode

$$y' = f(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{dy}{f(y)} \underset{(*)}{=} dx \quad \text{of} \quad f(y) \underset{(**)}{=} 0$$

Je bekomt de algemene oplossing als je vergelijking (*) lid-aan-lid integreert.
Uit de vergelijking (**) volgen eventueel nog singuliere oplossingen.

DV van het type $y' = f(x)g(y)$

- "Differentiaalvergelijking met separabele veranderlijken"
- **Methode**

$$y' = f(x)g(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{dy}{g(y)} \underset{(*)}{=} f(x)dx \quad \text{of} \quad g(y) \underset{(**)}{=} 0$$

In vergelijking (*) zijn de veranderlijken y en x gescheiden in aparte leden. De algemene oplossing volgt uit een lid-aan-lid integreren van deze vergelijking.
Uit de vergelijking (**) volgen eventuele singuliere oplossingen.

Lineaire DV van orde één

- **Standaardvorm**

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

- **Methode**

1. Bepaal een primitieve functie $\Phi(x)$ van $P(x)$ en stel $G(x) = e^{\Phi(x)}$.
2. Bepaal een primitieve functie $\Psi(x)$ van $G(x)Q(x)$.
3. De algemene oplossing luidt dan

$$y(x) = \frac{1}{G(x)}\,(\Psi(x) + C) \quad (C \in \mathbb{R})$$

DV van Bernoulli

- **Standaardvorm**

$$y' + P(x)y = Q(x)y^p \quad (p \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

- **Methode**

1. Deel beide leden van de standaardvorm door y^p, mits $y^p \neq 0$:

$$y^{-p}y' + P(x)y^{1-p} \underset{(*)}{=} Q(x)$$

2. Onderzoek of de vergelijking $y^p = 0$ oplossingen voortbrengt.
3. Herleid vgl. (*) tot een lineaire DV van orde 1 door de hulpfunctie $z = \frac{1}{1-p}\,y^{1-p}$ in te voeren:

$$z' + (1-p)P(x)z = Q(x)$$

4. Los de vergelijking uit vorige stap op naar z.
5. Los de hulpvergelijking $z = \frac{1}{1-p}\,y^{1-p}$ nu op naar y en gebruik erin de oplossing uit de vorige stap voor z.
6. Vat de oplossingen uit stappen 2 en 5 samen en vermeld welke de algemene en singuliere oplossingen zijn.